Riemann 3角級数論文について (数学史の研究)

AUTHOR(S):

小柴, 洋一

数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 72-111

Riemann 3角級数論文について

小柴　洋一(Yôichi KOSHIBA)（鹿児島大　理）

1999年5月10日(月)

この論稿はB.Riemannのよく知られた次の論文の歴史研究・調査の報告です。
B.Riemann,Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,1854

1　Riemannもまた歴史を語る人であった

この論文は13個の節と目次からなっています。この研究集会は歴史がテーマですが、Bernhard RiemannはEulerから始まってその時点まで（1854年までの）3角級数論がたどってきた歴史を語っています。前半の部分で18世紀から19世紀の半ばまで数学者たちを悩ましてきた関数の概念の定義をめぐる経緯が述べられています。
もともと理論のはじまりは波動の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\alpha^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

を初期条件

$$y(t,0)=0,y(t,l)=0$$

境界条件

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0$$

で解くことにありました。
要するに「任意の」関数が3角級数展開で表現できることが式の解析で

「わかる」訳ですが (文献 [2] 参照)、それはそれまでの関数概念からの飛躍を必要としていたわけです。
18 世紀においては関数というのは (なんとはなく) 式で表現されたもの (Analytische Gebilde) という観念が強かったものと思われます。この点について Euler,D'Alembert,Bernoulli 等の原資料による認識の深まりを要していますが、私の研究はまだそこまでは達していません。
1 節の前半において D'Alembert,Bernoulli, と Euler の間で関数概念のとらえかたの違いがあったことが述べられています。
また「任意の関数」という意味の単語 willkürliche Function が数カ所にわたって登場します。Riemann 自身の関数の論理的な (現代的) な意味 (定義) をのべているところはありませんでした。

2 Riemann 論文の翻訳

（王立ゲッティンゲン科学協会研究報告第１３巻より）

三角級数に関するこの論文は、本質的に異なる二つの部から成っている。第一部は研究史、そして (グラフで与えられた) 任意の関数と それが三角級数によって表示できるということについての見解である。この論文の執筆に際しては、この問題の第一人者として功績のある著名な数学者の研究から幾つかの示唆を得させていただいた。第二部では、三角級数による関数の表現可能性について 今日なお 解決されていない問題を含んだ研究を取り上げる。その前に、定積分の概念とその有効性の範囲に関する短い議論をしておかなければならない。

任意に与えられた関数が三角級数によって表示できるか という問題についての歴史

1.

フーリエによって名付けられたいわゆる三角級数、すなわち

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$

$$+\frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots$$

の形の級数は、非常に任意性のある関数が現れる数学の分野で重要な役割を果たす；それどころか、物理学にとって非常に重要であるこの数学の分野の最も本質的な発展が、この級数の性質へのより確かな見識に依っていた、と正当に言明できる。すでに任意関数の考察へと至る最初の数学上の研究において、そのような全くの任意関数が上述の形の級数によって表されるか、という疑問が話題になっていた。

これは前世紀半ばのことで、当時の最も著名な数学者たちが携わった 振動する弦についての研究の際に提起された。我々の研究対象に関しての彼らの見解について述べるには、彼らの取り扱ったこの問題について触れねばならないだろう。

ご存じのように、ある—実際に近似的にあてはまる—条件のもとで、xが始点からの距離を、yがその時刻tでの静止点からの距離を意味するとすれば、平面内で振動する弦の形は、偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

によって定められる。ここで α は tにも、そして弦が至る所で均等に密な場合には xにも関係しない定数である。

この微分方程式に一つの普遍的な解答を与えた最初の人物は ダランベールだった (1747 年)。

彼は x と t の関数 y で、y がこの方程式を恒等的に成立させているとすると、y は、

$$f(x + \alpha t) + \varphi(x - \alpha t)$$

の形のものでなければならないことをを証明した。なぜならば x, t の代わりに独立 変数 $x + \alpha t, x - \alpha t$ の導入によって、

$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\alpha\alpha}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ は $4\dfrac{\partial \frac{\partial y}{\partial(x+\alpha t)}}{\partial(x - \alpha t)}$ に変換されるからである。

この一般の運動の法則から導かれる偏微分方程式の他に、y は さらに弦の固定点において常に $= 0$ である という条件を満たさなければならない；そこでこれらの点の一つにおいて $x = 0$、別の点において $x = l$ の時

$$f(\alpha t) = -\varphi(-\alpha t), f(l + \alpha t) = -\varphi(l - \alpha t)$$

従って

$f(z) = -\varphi(-z) = -\varphi(l - (l + z)) = f(2l + z),$

$y = f(\alpha t + x) - f(\alpha t - x)$ となる。
ダランベールはこの問題の一般解を作った後、研究報告の続号で 方程式 $f(z) = f(2l + z)$ に取り組む；すなわち z が $2l$ だけ増大する時、変化することのない解析式を探究する。
この関数 $f(z)$ の満たすべき条件の本質をより正確に見つけだす、という功績を残したのはオイラーだった。彼はベルリン・アカデミーの次の年の研究報告で このダランベールの取り扱った問題に 新たな表現を示した。彼は、どこかある時点に対して弦の形と それぞれの点の速度（つまり y と $\frac{\partial y}{\partial t}$）が与えられるならば、問題の性質によって弦の動きは完全に決定されることに気づき、この両方の関数が任意に引かれた曲線によって定められていると考えると、そこから常にある単純な幾何学的構成を通してダランベールの関数 $f(z)$ が見つけられることを示した。実際に、$t = 0, y = g(x)$ そして $\frac{\partial y}{\partial t} = h(x)$ と仮定すれば、0 と l の間の x の値に対して

$$f(x) - f(-x) = g(x), f(x) + f(-x) = \frac{1}{\alpha}\int h(x)dx$$

で、従って $-l$ と l の間で関数 $f(z)$ が得られる；ここからしかし 等式

$$f(z) = f(2l + z).$$

によって z の他の各々の値に対する その値が生じる。
これが 抽象的ではあるが今日オイラーによる関数 $f(z)$ の決定として一般的に通用している概念である。
しかしダランベールは オイラーが彼の方法を拡張したことに対して直ちに異議を唱えた。というのも彼の方法では y が t と x について解析的に表されると仮定しなければならないからである。
オイラーがこれに対して答える前に、二人のものとはまったく異なったこの研究対象についての三番目の論説がD．ベルヌーイによって発表された。ダランベール以前にすでにテイラーは、n は整数として

$$y = \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\alpha t}{l}$$

とすれば、$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha\alpha}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$、 そして $x = 0, x = l$ で 0 に等しくなることを示していた。彼はこのことから 一つの弦がその弦の基音の他に $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$ の長さの (その他には同じ様に振る舞う) 弦の基音を与え得る、という物理学上の事実を明らかにし、その個々の解を普遍的なものと見なした。つ

まり整数 n がその音の高さによって適宜に定められるならば、弦の振動は少なくとも非常に近似的に方程式によって表されると信じた。一つの弦が同時に幾つかの異なった基音を与えうるという観察から、ベルヌーイはさらに その弦は(理論上は)式

$$y = \sum a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi\alpha}{l}(t-\beta_n)$$

で振動し得るということに気づいた、そして この式から、観察された現象の変化が明らかにされることから、この方程式が最も普遍的なものになると考えた。この見解を確かなものにするために、彼は いくつかの点において有限の質量によって重しをかけた 質量のない糸が描くであろう振動を研究し、その振動がある数の点において同じ数の振動に分解されることを示した。そのそれぞれは質量をどのようにしても同じ時間続いた。

このベルヌーイの研究報告は オイラーに新たに論文を書かせることになり、これはベルヌーイのもののすぐ後に ベルリン・アカデミーの研究報告で印刷された。この論文の中でオイラーは 関数 $f(z)$ が端点 $-l$ と l の間でまったく任意なものであり得る、と ダランベールと対抗する見解をとった。そして、ベルヌーイの解—オイラーは過去においてすでにこれを 特別なものとして挙げていた—は、級数

$$a_1\sin\frac{x\pi}{l} + a_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots$$

$$+\frac{1}{2}b_0 + b_1\cos\frac{x\pi}{l} + b_2\cos\frac{2x\pi}{l} + \cdots$$

が横座標 x に対し 横座標 0 と l の間でまったく任意曲線の縦座標を表現しうる場合そしてその場合にのみ普遍的であり得ると述べた。ところで当時は、解析的な式—有限または無限の—であらかじめ設定された全ての変形が変量のそれぞれの値にあてはまることを、それこそ特に特殊な場合を除いて全てに適用できるということを疑う者はなかった。そのため 代数曲線はあるいは一般に解析的に与えられた周期的でない曲線を上述の式によって描くのは不可能に思われた。その理由からオイラーは、ベルヌーイに対する疑問に決着をつけなければならないと考えた。

オイラーとダランベールの対立はそうしている間にも収まることはなかっ

た。これは 当時まだそれほど知られていなかった若い数学者ラグランジュに あるまったく新しい方法でこの問題を解いてみる気にさせ、この方法で彼はオイラーの解に至った。彼は、均等な間隔で 同じ重さの有限ないくつかの数の重しをかけた質量のない糸の振動を確定することを試み、そしてその重しの数が無限大へと増大するとき、この振動がどのように変化するかを研究した。しかし彼の解析的技法の練達と駆使によっては、やっとこの研究の初めの部分が遂行できただけで、無限への移行は多くを残したままであった。その為ダランベールはある論文の中で―彼はそれを自身で発行した数学(小)論文集の巻頭にもってきたのだが―引き続き 彼の解が最も普遍的だという栄誉を主張することができた。したがって、当時の著名な数学者たちのこのことに関する見解は分かれたままであった；その後の研究においても誰もが根本的にダランベールの見解を支持したのではあるが。

こうして、結局のところ この確執の際に展開された任意関数とその三角級数による表示についての見解をまとめるために、オイラーは最初にこの関数を解析学に持ち込み、幾何学的解釈に基づいて、無限小解析をこれに適用した。ラグランジュはオイラーの解(振動の軌道の幾何学的な構成)を正しいと見なしたものの、オイラーによるこの関数の幾何学的な処理は彼を満足させなかった。これに対しダランベールはオイラーの微分方程式の解釈の仕方を受け入れ、彼の解の正当性に対して さほど異議を唱えることもなかった。というのも全く任意の関数においては、その微分商が連続かどうかということを知ることはできなかったからだ。ベルヌーイの解に関しては、これが普遍的ではないという点で３人全員が一致していた；しかしダランベールが、ベルヌーイの解が自分のものより普遍性に劣るということをはっきりさせるためには、解析的に与えられた周期的な関数もまた三角級数によって必ずしも描かれるわけではないことを主張しなければならなかったのに対し、ラグランジュの方は この可能性を証明できると信じていた。

2.

任意の関数が解析的に表現できるかという問題に 本質的には何ら解決の気配が見られないまま、およそ５０年が経過した。ここで フーリエによる一つの観察がこの問題に一筋の新たな光を投げかけた；これによってこの数学の分野の発展に新時代が到来した。これはまた 数理物理学の急速な発展の中で とりあえずは直ぐに知られるようになった。

フーリエは、三角級数

$$f(x) = \begin{cases} & a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots \\ +\frac{1}{2}b_0 + & b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots \end{cases}$$

において、係数が公式

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

によって定められることを注意した。彼はこの確定方法が 関数 $f(x)$ が全く任意に与えられる場合にも応用できるとみた；彼は $f(x)$ に対して いわゆる不連続の関数 (横座標 x に対する縦座標が切れ切れになった曲線) を与え、実際にその関数の値を与えるような級数を得た。

フーリエがフランス・アカデミーに提出した熱に関する彼の最初の研究の中で、全く任意に (グラフで) 与えられた関数が三角級数によって表されるという定理を初めて述べた時、この説は年老いたラグランジュにとって まったく意外なものだったので、彼はこれに断固として反対した。これに関しての記録がまだパリ・アカデミーの公文書保管所に残っているそうだ。そのことには気付かずポワソンは 任意の関数の表現に三角級数を使用するところでは常に、ラグランジュの振動弦についての論文のこの表現法について書かれたある箇所を参照するよう指示している。この説—これはフーリエとポワソンの有名な張り合いからのみ知られるようになっただけなのだが—の誤りを証明するために、私たちはもう一度ラグランジュの研究報告に立ち返らなければならない；というのもパリ・アカデミーにある 例の記録文書については何も公にされていないからである。

実際 ポワソンによって引用された箇所には、次のような公式が見られる：

”$y = 2\int Y \sin X\pi dX \times \sin x\pi + 2\int Y \sin 2X\pi dX \times \sin 2x\pi$
$+ 2\int Y \sin 3X\pi dX \times \sin 3x\pi + etc. + 2\int Y \sin nX\pi dX \times \sin nx\pi,$
$x = X$ のときに、横座標 X に対応する縦座標 Y に対し $y = Y$ であるように。”　しかしながら今日では、この公式はフーリエ級数と全く同じものに見えるため、一見簡単に取り違えてしまいそうである；しかしこれは単に ラグランジュが $\int dX$ の記号を用いたからであり、今日ならば彼はここに $\Sigma\Delta x$ を使ったであろう。彼等は有限の正弦級数

$$a_1 \sin x\pi + a_2 \sin 2x\pi + \cdots + a_n \sin nx\pi$$

において、xの値が

$$\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \cdots, \frac{n}{n+1},$$

のところで与えられたものになるように定める、として与えた。これらのxの値がラグランジュが不定の形で単にXと記しているものである。もしラグランジュがこの公式の中でnが無限に大きくなるとしたならば、彼はいずれにせよフーリエの解に到達していたであろう。しかし彼の論文を一通り読めば、彼が 全く任意の関数が無限の正弦級数によって実際に表現できるという考えからはかなりかけ離れていることがわかる。それどころか彼はすべての研究を直接の形でやっている。なぜなら この任意の関数が一つの式によって表されることはなく、三角級数については、それが解析的に与えられた周期的なそれぞれの関数を表現しているだけである、というのが彼の信ずるところだったから。確かに我々には ラグランジュが彼の和の公式によってフーリエ級数に到達しなかっただろうということは考え難いことである；しかし彼のなかには オイラーとダランベールの対立を通してすでに どの方法を採るべきかという見解が固められてしまっていたのだ。彼は極限観察を適用する前に、質量の不確定で有限な数に対する振動の問題をまず完全に解決しなければいけないと考えた。これはフーリエ級数を知っていれば不必要な かなり膨大な量の研究を彼に要求した。

フーリエによって今や確かに三角級数の性質は申し分なく正確に認識された；それ以来これは数理物理学において任意の関数の表現にしばしば応用され、そしてその度ごとに フーリエ級数が現実に関数の値に対して収束することが認められた；しかしこの重要な定理が一般に証明されるまでには 長い時間を要したのであった。

コーシーが１８２６年2月２７日、パリ・アカデミーの研究報告で発表した証明は、ディリクレが指摘したように不十分なものだった。コーシーは、任意に与えられた周期関数$f(x)$においてxに対し複素変数$x+yi$を代入した時、この関数がyのそれぞれの値に対して有界であると仮定した。しかしこれは関数が 定数のときにしか、そのようにはならない。しかし、この仮定がそれから先の結論には不必要であることは容易にわかる。yの全ての正の値に対して有限で、その実数部分が$y=0$について与えられた周期関数に等しくなるような関数$\varphi(x+yi)$があれば十分なのである。実際には正しいこの定理を前提とするならば、コーシーによって

採られたこの方法は むしろ逆にフーリエ級数から この定理が引き出されるものとして捉えられる。

3.

１８２９年１月、クレルレ誌に掲載されたディリクレの論文において ようやく、いたるところ積分ができ、かつ 有限個の極大と極小を持つ関数の三角級数による表現可能性が厳密に明確にされた。

この問題を解くために採られた方法をディリクレは、全ての項が正になるとき 無限級数が収束したままであるか否かで その級数が二つの本質的に異なった類に分かれるという見識から見つけだした。前者では項は任意に置き換えられるが、それに対し後者の値はその項の順序に依存している。実際に、第二類の級数において正の項が

$$a_1, a_2, a_3, \cdots,$$

によって記され、負の項が

$$-b_1, -b_2, -b_3, \cdots,$$

によって記されている時、明らかに Σa と同じく Σb も無限でなければならないということわかる；なぜなら もし両方が有限ならば 符号を同じにしても収束するであろうし、もし片方が無限ならば 級数は発散するだろうからである。明らかにそのときは、級数は 項の適当な順序変えによって任意に与えられた値 C を持ち得る。というのも級数の正の項は その値が C より大きくなるまで、負の項は C より小さくなるまで交互にとっていくと、C との差は 最後の記号変換に先行する項の値より大きくなることは決してないからである。さらに量 a と同じく 量 b も増大する指数と共に最後には無限に小さくなるため、C との差もまた、級数において十分先の方に行けば、任意に小さくなる、つまり級数は C に収束する。

有限の和の法則は 第一類の級数にのみ応用できる；その級数だけは実際に項の総体としてみなすことが出来るが、第二類の級数では出来ない；そのことは主に、ある変数のだんだん大きくなっていくべき乗によってできている級数が 一般的に言えば—つまりこの量の個々の値について—第一類に属するために、より以前の前の世紀の数学者達によって見落とされていたのであろう事実である。

フーリエ級数は 今や明らかに第一類に属するとは限らないことがわか

る；つまりその収束は、コーシーの徒労に終わった試みのように、項の減少を決定する法則から引き出されるものでは全くないからである。むしろ 有限の級数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin\alpha d\alpha \sin x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin 2\alpha d\alpha \sin 2x+\cdots$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha \sin nx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos\alpha d\alpha \cos x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos 2\alpha d\alpha \cos 2x+\cdots$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha \cos nx,$$

か、又はそれと同じものである積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

が　nが無限大にいったとき、値$f(x)$に近づくことが証明されなければならなかった。

ディリクレはこの証明を次の二つの定理を根拠にした：

1) $0<c\overline{\overline{<}}\frac{\pi}{2}$のとき、$n$が無限大にいったとき$\int_0^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$は増大する$n$と共に最後には 値$\frac{\pi}{2}\varphi(0)$に無限に近づく；

2) $0<b<c\overline{\overline{<}}\frac{\pi}{2}$のとき、$\int_b^c \varphi(\beta)\frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta}d\beta$は 増大する$n$と共に最後には 値0に無限に近づく。

これは、関数$\varphi(\beta)$がこの積分の上端、下端の間で 常に減少するか、又は増大することを前提としている。　この二つの定理を用いることによっ

て、関数 f が増大から減少へ、又は減少から増大へと有限回移行する関数であるとき、積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{x-\alpha}{2}}d\alpha$$

は明らかに ある有限個の項に分解され、n が無限大にいくとき、このうちの一つは $\frac{1}{2}f(x+0)$ に、他の一つは $\frac{1}{2}f(x-0)$ に、残りは 0 に収束する。

このことから、三角級数によって 区間 2π に応じて周期的に反復する各々の関数が表現できることが明らかになる。この関数は、

1) いたるところ 積分ができ、

2) 有限個の極大と極小を持ち、

3) その値が 飛躍的に変化したところで、その両側からの極限値の平均値をとる。

最初の２つの性質を持つが、第三の性質を持たない関数は 明らかに三角級数によって表現することは出来ない；というのも連続でない関数を表現する三角級数は連続でない点のところで その関数から離れてしまうであろうから。しかし最初の二つの条件を満たさない関数が三角級数によって表現できるか、そして それはどんな時か、という問題は まだこの研究では解決されていない。

ディリクレのこの論文によって 重要で解析的な膨大な量の研究に一つの確かな土台が与えられた。彼は オイラーを悩ませていた問題点を完全に明らかにすることによって、多くの傑出した数学者達が（１７５３年以来）７０年以上も取り組んできた問題を解くことに成功した。実際、まさに解き明かされねばならなかった自然の性質の全ての場合において この問題は完全に解決された。というのも、物質の状態とエネルギーが無限の小ささの中で 時と場所によってどう変化するのか、ということについて我々がいかに不確かであろうとも、それでも、ディリクレの研究の及んでいない関数が自然に現れることはないと、想像することは確かにできる。

それにも関わらず、このディリクレによって解決されていない問題は二重の意味で注目に値すると思われる。

先ず第一に、ディリクレが論文の終わりに自ら述べているように、こ

の研究対象は無限小解析の原理と密接な関係があり、この原理をより明確に より確かなものにするのに役立てることができる。この点に関してこの研究対象の取り扱いは 直接関心がもたれる。

第二に、フーリエ級数の応用はしかし 物理学上の研究において制限されることはない；これは現在 純粋数学の分野、整数論にもうまく応用される。そしてここで まさにそのディリクレがその三角級数による表現可能性を研究しなかった関数が重要なものに思われる。

論文の終わりでディリクレは、この問題に将来また取り組むと約束しているのだが、これは今日まで果たされないままになっている。またディルクセンとベッセルのコサインとサインの級数に関する研究もこれを補ってはいない；むしろ厳密さと普遍性において ディリクレのものに及ばない。ディリクレのものとほぼ同時期に書かれたディルクセンの論文は、明らかに知識に欠けており、確かに概ね正しい方法を採ってはいるのだが、細かな点で幾つかの不正確さが見られる。彼が級数の和についてのある特殊な事例の中で 誤った解を見いだしていることはともかく、副次的な観察において 特別な場合にのみ可能な級数の展開に頼っているからである。その結果、彼の証明は あらゆる所で有限の第一の微分商を持つ関数に対してのみ完全なのである。ベッセルはディリクレの証明を単純にすることに努める。しかし、この証明の中での修正では 結局のところ何ら本質的な単純化は為されず、彼は厳密さと普遍性を求めて 相当悩むのだが、せいぜいのところ この証明をよく知られている概念で表現し直すくらいのものである。

三角級数による関数の表現可能性の問題は つまりこれまでの所、関数がいたるところ積分ができ、有限個の極大と極小を持つ、という二つの前提の下においてのみ明確にされている。後者が前提となっていなければ ディリクレの二つの積分定理はこの問題を明確にするには不十分である；前者の前提が欠けていれば フーリエの係数の定義はすでに応用できない。次に見るように、関数の性質についての特別な前提なしに研究されるべきこの問題について採られた方法は こうして制限されている；ディリクレのもののように直接的な方法は必然的に不可能である。

定積分の概念とその有効性の範囲について

4.

定積分の研究の幾つかの基本点に在る不確かさのために我々は、定積分の概念とその有効性の範囲に関しての幾つかの点を 先に述べなければな

らない。

そこで先ず：$\int_a^b f(x)dx$ を どう解釈するべきだろうか？

これを明確にするため、我々は $x=a$ と $x=b$ の間で大きさの順に並んだ値 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ の列をとり、簡略のために $x_1 - a$ を δ_1 によって、$x_2 - x_1$ を δ_2 によって $\cdots b - x_{n-1}$ を δ_n によって記し、更に ε によって正の 1 より小さな任意の値を表すとしよう。そうすると、和の値

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$

は 区間 δ と量 ε の選択に依存する。その和が、δ と ε がどのように選択されたとしても、全ての δ が無限に小さくなると、確定した極限値 A に無限に近づくという特徴を持つならば、この値を $\int_a^b f(x)dx$ とする。

この和がこの特徴を持たないときは、$\int_a^b f(x)dx$ は何も意味しない。それでも様々な事例において、この記号にさらに意味付けすることが試みられた。この定積分の概念の拡張のうちで、ひとつのものが全ての数学者により受け入られている。すなわち、関数 $f(x)$ が区間 (a,b) の中で変数が一つの値 c へ近づいたとき 無限に大きくなるとき、和 S は、δ についてその小ささの程度をどのように指定しようと、明らかにどのような任意の値もとることができる；つまりこの値は極限値をもたず、$\int_a^b f(x)dx$ は上に述べたことに従って 何の意味も持たないだろう。しかし

$$\int_a^{c-\alpha_1} f(x)dx + \int_{c+\alpha_2}^b f(x)dx$$

が ここで、α_1 と α_2 が無限に小さくなる時に、ある定まった極限値に近づくならば、それを $\int_a^b f(x)dx$ と解釈する。

定積分の概念について、基本的概念によっては存在しないような場合にコーシーが与えた別の解釈は、個々の研究では役にたつかもしれない；しかし これは一般に採用されることはなく、独断的でもあるので おそらく決して有効ではないであろう。

5.

次に我々はここで、この概念の有効性の範囲 あるいは次の問いを探究する：どんな場合に関数は積分計算を生ぜしめ、どんな場合には生ぜしめないか？

我々は先ず 狭義での積分の概念を考察する。つまり、全てのδが無限に小さくなる時、和 Sは収束すると仮定する。そこで関数のaとx_1との間の区間で最大の変動 つまりこの区間上の 最も大きな値と最も小さな値との差をD_1とし、x_1とx_2の間の区間では 同じものをD_2で、$\cdots$、x_{n-1}とbの間の区間ではD_nとすると

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$$

は 量δと共に無限に小さくならなければならない。我々はさらに、全てのδがdより小さい限り、この和がとる最も大きな値がΔだと仮定する；Δはそこでdの関数でdと共に常に減少し この量と共に無限に小さくなる。さらに、変動がσより大きくなる区間の総量をsとするとき、これらの区間の寄与は和$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$に対して 明らかに$\geqq \sigma s$になる。ここから$\sigma s \overset{=}{<} \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n \overset{=}{<} \delta$ 従って $s \overset{=}{<} \frac{\Delta}{\sigma}$. さらに$\frac{\Delta}{\sigma}$は、$\sigma$が与えられると、$d$の適切な選択により常に任意に小さくなり得る；この理由から 同じことがsに適用され、そこから次のことが明らかになる：

全てのδが無限に小さくなるとき、和Sが収束するためには、関数$f(x)$が有界であることと共に、変動が$> \sigma$であるような区間の総量がdの適切な選択により常に任意に小さくすることができることが求められる。

この定理は 逆も当てはまる。

関数$f(x)$が有界で、全ての量δが限り無く小さくなるときに そこでの関数$f(x)$の変動が与えられた量σより大きくなる区間の総量sが 常に最後には無限に小さくなるならば、全てのδが無限に小さくなるところで和Sは収束する。

なぜなら、変動$> \sigma$であるところの区間は 和$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$に$s$と関数の$a$と$b$の間における変動、それは仮定により有限、との積よりも小さな量を与える；その他の区間は$\sigma(b-a)$より小さな寄与を与える。そうすると明らかに、まずσは任意に小さいと仮定し、そのとき更に区間の大きさを、仮定によって、sを十分小さくとり、それによって和$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \cdots + \delta_n D_n$が任意に小さな値になるように定め、結果として和$S$の値が任意に狭い範囲にはいるようにすることができる。我々はかくて 量δを無限に小さくするとき和Sが収束し、そして、厳密な意味での 関数$f(x)$のaとbの間での積分を語ることができるためのの必要かつ十分な条件を見つけた。

さらに、積分の概念が 上に述べたように拡張されるとき、明らかに これによって積分計算が可能となるためには、我々が手にした二つの条件の

うち後者は 不可欠のものである；関数が有界であるという条件の代わりには、ある一つの値に変数が近付いた場合にのみ 関数が無限になり、積分の上限、下限がこの値に無限に近づいたとき、ある定まった極限値になる、という条件がはいってくる。

6.

我々が 定積分の可能性に対する条件を一般的に、つまり 被積分関数の性質について特別な仮定なしに研究したので、この研究は今や個別の場合に一部は適用され、一部はさらに詳しく解説されねばならない。まず、それぞれどんなに密な区間でも無限に 多くの不連続点をもつ関数についておこなう。

この関数は どこでもまだ考察されていないので、ある確かな例から取り上げるのが良いだろう。簡略にするため、x の最近整数への余りを (x) によって表す。　区間の真ん中にあり、この決め方が二つの意味に解釈できるときは 二つの値 $\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の平均値、つまり 0 とする。さらに n によって整数を、p によって奇数を表す。そして それから級数

$$f(x) = \frac{(x)}{1} + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}$$

を作る；このようにして この級数は、容易に認められるように、x の各々の値について収束する；この値は、変数の値が絶えず増大しながら、または反対に減少しながら x と等しくなるとき、常にある一定の極限値に近づく。より厳密に言えば、$x = \frac{p}{2n}$ のとき、(ここで 、p, n は互いに素な整数)

$$f(x+0) = f(x) - \frac{1}{2nn}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots) = f(x) - \frac{\pi\pi}{16nn},$$

$$f(x-0) = f(x) + \frac{1}{2nn}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots) = f(x) + \frac{\pi\pi}{16nn},$$

その他の所は全て　$f(x+0) = f(x), f(x-0) = f(x)$.

この関数はつまり、有理数 x に対してそれを既約な分数として表したとき 2 で割り切れる分母を持つものに対して連続でなく、どんなに狭い区間でも無限回不連続になる。しかし与えられた量より大きな跳びの数は常に有限である。この無限回不連続になる関数はどこでも積分が可能

である。実際、この点について はこの関数が有限であることと並んで、x の各々の値に対して両側に $f(x+0)$ と $f(x-0)$ の極限値を持つということ、そして与えられた量 σ より大きな 或いは等しい跳びの数が常に有限であることという二つの特徴があれば十分である。なぜなら、我々の上述の研究を用いることによって、明らかに d がこの二つの状況の結果として、この跳びを持たない全ての区間上で 変動が σ より小さくなるように、そして跳びを持つ区間の総量が任意に小さくなるように、常に小さく取れるからである。

簡単に直接示されるように、有限個の極大と極小を持つ関数（これにはしかし たった今考察したものは含まれない）が、それらが無限にならない所で、常にこの二つの特徴を持つことが、そして このことから、それらが無限にならないあらゆる所で 積分が可能になるということが注目される。

ここで、積分できる関数 $f(x)$ が 一つの [単独の] 値に対して無限に大きくなる場合をさらに詳しく考察するため、我々は このことが $x=0$ に対して起こると仮定する。すなわち、x が正で減少していくと、その値は最後には 与えられたいかなる限界をもを越えて増大するとする。

そうすると、$xf(x)$ が x が減少していくとき、ある有限の限界 a から、ずっとある有限の量 c より大きく留まっていることはできないことは簡単に示される。というのも、そこでは

$$\int_x^a f(x)dx > c\int_x^a \frac{dx}{x},$$

であり、つまり その量が減少する x と共に最後には無限へと増大する $c(\log\frac{1}{x} - \log\frac{1}{a})$ より大きいであろうから。そこで、この関数が $x=0$ の近くで 無限に多くの極大と極小を持っていないとき、$f(x)$ が積分が可能であるためには $xf(x)$ は必然的に x と共に無限に小さくなるはずである。一方、

$$f(x)x^\alpha = \frac{f(x)dx(1-\alpha)}{d(x^{1-\alpha})}$$

が $\alpha < 1$ の値に対し x と共に無限に小さくなる場合は、その積分は、下端が無限に減少していくとき 収束することは明らかである。

同じく 次のことが認められる：積分が収束するときは 関数

$$f(x)x\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)dx}{-d\log\log\frac{1}{x}}, f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x} = \frac{f(x)dx}{-d\log\log\log\frac{1}{x}}\cdots,$$

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\log\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\log^{n}\frac{1}{x}=\frac{f(x)dx}{-d\log^{1+n}\frac{1}{x}}$$

は、xが減少していくとき、 ある有限のところから先、常にある有限の量より大きく留まっていることはできない。、そこで この関数が有限個の極大と極小を持つとき、xと共に無限に小さくなるはずである；これに対し積分 $\int f(x)dx$ は、

$$f(x)x\log\frac{1}{x}\cdots\log^{n-1}\frac{1}{x}(\log^{n}\frac{1}{x})^{\alpha}=\frac{f(x)dx(1-\alpha)}{-d(\log^{n}\frac{1}{x})^{1-\alpha}}$$

が $\alpha<1$ に対し x と共に無限に小さくなると、下端が無限に小さくなっていくとき収束する。

しかし、関数 $f(x)$ が無限に多くの極大と極小を持つ場合は、その無限になるオーダーについては、何ら定まった法則を定めることはできない。実際、関数について、その絶対値のオーダーだけが問題としたとき、常に 適切に符号をつけることによって、積分 $\int f(x)dx$ が下端が減少するとき収束するようにできる。一つの例として、関数

$$\frac{d(x\cos e^{\frac{1}{x}})}{dx}=\cos e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\sin e^{\frac{1}{x}}$$

は、無限大になる。しかも、その無限大のオーダー（$\frac{1}{x}$ を単位としたときの次数）が無限に大きくなる関数の例である。

これで この実際のところ [我々のものとは] 別の分野に属している研究対象については 十分に言及することが出来たと思う；ここから我々の本来の課題、三角級数による関数の表現可能性についての一般的な研究に取りかかろう。

関数の性質に関して特別の仮定をしないときの 三角級数による関数の表現可能性についての研究

7.

この研究対象に関するこれまでの研究は、フーリエ級数を 、自然に現れる場合について証明するという目的を持っていた；その理由から 全く任意と仮定した関数についての証明が着手され、その後、目的が妨げられない場合には、証明のために 関数の動きが随意に制限されるようになっ

た。我々の目的のためには、関数の動きについては 関数の表現可能性に必要な条件のもとにだけおかれるべきである；そこで先ず第一に 表現可能性に必要な条件を見つけ出し、その中からさらに表現可能性に十分な条件を選び出さなければならない。そこで、 これまでの研究が、ある関数がいろいろな特徴を持つとき、これがフーリエ級数によって表現できることを証明したのに対し、我々はこれとは逆の問いを前提としなければならない：ある関数が三角級数によって表現できる場合、そのことから、変数が連続的に変化をした際のこの関数の動き、その値の変化について 何が導かれるか？

従って、我々は級数

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \cdots$$

$$+\frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \cdots$$

を、或いは、簡略にするため

$$\frac{1}{2}b_0 = A_0, a_1 \sin x + b_1 \cos x = A_1, a_2 \sin x + b_2 \cos x = A_2, \cdots$$

と書いて、級数

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

が与えられたものとする。我々は この式を Ω によって、その値を $f(x)$

によって表す。この関数は 級数が収束する x のその値に対してのみ存在する。

級数が収束する必要条件として、n が無限大にいくときその項は 0 に近づかなければならない。係数 a_n, b_n が、n が無限大にいくとき、0 に近づくならば、級数 Ω の項は x の各々の値に対して 0 に近づく；他の場合には限りなく小さくなるということは、x の特別な値に対してのみ生じ得る。この二つの場合は 別個に扱う必要がある。

8.

我々はまず、級数 Ω の項が x の各々の値に対して限りなく（訳注、一様に）小さくなると仮定する。　この仮定の下で、Ω から項別に二度の積分計算を通して得る級数

$$C + C'x + A_0\frac{xx}{2} - A_1 - \frac{A_2}{4} - \frac{A_3}{9} \cdots = F(x)$$

は x の各々の値について収束する。その値 $F(x)$ は x について連続的に変化し、この x の関数 F は 従っていたる所で積分ができる。

級数の収束と 関数 $F(x)$ の連続性の両方を確認するために、$-\frac{A_n}{nn}$ までの項の和を N によって、級数の残りの部分、つまり級数

$$-\frac{A_{n+1}}{(n+1)^2}-\frac{A_{n+2}}{(n+2)^2}-\cdots$$

を R によって、$m>n$ での A_m の最大値を ε によって表そう。そうすると、R の値は、この級数がどのくらい続こうと、符号は別として

$$<\varepsilon(\frac{1}{(n+1)^2})+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots)<\frac{\varepsilon}{n}$$

の範囲にある、したがって、n を十分に大きく取れば、任意に小さな範囲にある。; 従って 級数は収束する。
さらに 関数 $F(x)$ は連続である ; すなわち、x の変化を 十分小さく与えれば、関数の変化はいくらでも小さくできる。というのは、$F(x)$ の変化は R と N の変化によって引き起こされているからである ; 明らかにここでまず n を十分大きくとって、x の値が何であっても R が十分小さくなるようにし、従ってまた R の変化が x の変化に対して任意に小さくなるように し、そして x の変化を、N が変化も任意に小さくなるように 取ることができるからである。

この関数 $F(x)$ についての幾つかの定理を先に述べるのが良いだろう。その定理の証明が研究の流れを妨げてしまうであろうから。

定理 1. 級数 Ω が収束し、α と β が その比が有限に保ちながら限りなく小さくなる場合には、

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

は その級数と同じ値に収束する。

実際、

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

$$=A_0+A_1\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}+A_2\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\frac{\sin 2\beta}{2\beta}+A_3\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}\frac{\sin 3\beta}{3\beta}+\cdots$$

になるが、簡単な場合を先ず解決するために、$\beta=\alpha$とすると

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha}=A_0+A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2+A_2\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)^2+\cdots$$

となる。
無限級数を

$$A_0+A_1+A_2+\cdots=f(x),$$

として、級数を

$$A_0+A_1+\cdots+A_{n-1}=f(x)+\varepsilon_n$$

とおこう。こうして 任意に与えられた量δに対して$n>m$ならば、$\varepsilon_n<\delta$になるようにnの値mを定める。ここで我々はαを$m\alpha<\pi$になるように小さく取り、さらに 代入$A_n=\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n$を用いて$\sum_{0,\infty}\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2 A_n$を 式

$$f(x)+\sum_{0,\infty}\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\},$$

という形にし、このうしろの無限級数の部分を次のように三つの部分に分ける。

1) 番号1から m までの項、

2) 番号$m+1$から$\frac{\pi}{\alpha}$より小さい最大整数、それをsとしよう、までの項、

3) 番号s+1から無限までの項。

このようにして 最初の部分は 連続して変化する項の有限の数で構成され、このため、αが十分に小さくなるならば、その極限値0に任意に近づけることができる；第二の部分は、ε_nの係数が常に正であるから、明らかに符号は別にして

$$<\delta\left\{\left(\frac{\sin m\alpha}{m\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin s\alpha}{s\alpha}\right)^2\right\}$$

となる。; 最後に 第三の部分の極限を取るために、一般項を

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

と

$$\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{n\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}=-\varepsilon_n\frac{\sin(2n-1)\alpha\sin\alpha}{(n\alpha)^2}$$

に分解する;
そうすると、それは

$$<\delta\left\{\frac{1}{(n-1)^2\alpha\alpha}-\frac{1}{nn\alpha\alpha}\right\}+\delta\frac{1}{nn\alpha}$$

となり、従って $n=s+1$ から $n=\infty$ までの和は

$$<\delta\left\{\frac{1}{(s\alpha)^2}+\frac{1}{s\alpha}\right\}$$

となり、この値は α を限りなく小さくするとき、$\delta\left\{\frac{1}{\pi\pi}+\frac{1}{\pi}\right\}$ となる。
したがって、級数

$$\sum\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

は この理由から、減少する α と共に、

$$\delta\left\{1+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi\pi}\right\}$$

より大きくなることはないことになり、従って0に近づく、したがって

$$\frac{F(x+2\alpha)-2F(x)+F(x-2\alpha)}{4\alpha\alpha}$$

$$=f(x)+\sum\varepsilon_n\left\{\left(\frac{\sin(n-1)\alpha}{(n-1)\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2\right\}$$

は、αが限りなく小さくなるとき、$f(x)$に収束する。こうして我々の定理は $\beta=\alpha$ の場合については証明された。

この定理を一般の場合に証明するために、

$$F(x+\alpha+\beta)-2F(x)+F(x-\alpha-\beta)=(\alpha+\beta)^2(f(x)+\delta_1)$$

$$F(x+\alpha-\beta)-2F(x)+F(x-\alpha+\beta)=(\alpha-\beta)^2(f(x)+\delta_2),$$

とすると、

$$F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)$$

$$=4\alpha\beta f(x)+(\alpha+\beta)^2\delta_1-(\alpha-\beta)^2\delta_2$$

となる。ここで、上に示した結果から、αとβの無限の減少と共に、δ_1とδ_2も無限に小さくなる；この時、$\dfrac{\beta}{\alpha}$が有限である限り

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}\delta_2$$

において、δ_1とδ_2の係数は無限に大きくならないので、この値もまた 無限に小さくなる；従って、

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

は $f(x)$ に収束する、w.z.b.w.

定理2.

$$\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$$

は $\alpha\to 0$ のとき 0 に収束する。

これを証明するために、級数

$$\sum A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$$

を三つの部分に分ける。第一群は ある添数 m までの全ての項——この添数から先の A_n はすべて ε より小さい——、第二群は $n\alpha\overline{\overline{<}}$ (ある固定し

た量 c) となる全ての項、第三群は 残りの級数の部分である。容易に知られるように、$\alpha \to 0$ のとき、第一の和は有界 であり、つまり < 固定した量 Q である；第二群の和は $< \varepsilon\frac{c}{\alpha}$、第三群の和は

$$< \varepsilon \sum_{c<n\alpha} \frac{1}{nn\alpha\alpha} < \frac{\varepsilon}{\alpha c}$$

である。

従って、$2\alpha \sum A_n (\frac{\sin n\alpha}{n\alpha})^2$ である $\frac{F(x+2\alpha)+F(x-2\alpha)-2F(x)}{2\alpha}$ は

$$< 2\left(Q\alpha + \varepsilon\left(c + \frac{1}{c}\right)\right),$$

であり、ここから定理が導かれる。

定理 3 . b, c を二つの任意の定数とする——大きい方を c とする——そして $\lambda(x)$ は その導関数と共に b と c の間で連続であり、両端で 0 になり、また その第 2 次導関数が有限個の極大と極小を持つ関数であるとする。このとき、積分

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\lambda(x)dx,$$

は、μ が無限に増大するとき、0 に収束する。

$F(x)$ を級数表示すると、

$$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

に対して、級数 (Φ)

$$\mu\mu \int_b^c (C + C'x + A_0\frac{xx}{2}) \cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

$$-\sum_{1,\infty} \frac{\mu\mu}{nn} \int_b^c A_n \cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

が得られる。

さらに、$A_n \cos\mu(x-a)$ は明らかに

$$\cos(\mu+n)(x-a), \sin(\mu+n)(x-a), \cos(\mu-n)(x-a), \sin(\mu-n)(x-a)$$

の和として表される。この4者において 最初の二つの項の和を $B_{\mu+n}$ によって、後の二つの項の和を $B_{\mu-n}$ によって表す。そうすると $\cos\mu(x-a)A_n = B_{\mu+n}+B_{\mu-n}$ となり、

$$\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}=-(\mu+n)^2B_{\mu+n},\ \frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}=-(\mu-n)^2B_{\mu-n},$$

また、$B_{\mu+n}$ と $B_{\mu-n}$ は、n が無限大にいくとき、一様に無限に小さくなる。 級数 (Φ) の一般項

$$-\frac{\mu\mu}{nn}\int_b^c A_n\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

は、

$$=\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu+n}}{dx^2}\lambda(x)dx+\frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c\frac{d^2B_{\mu-n}}{dx^2}\lambda(x)dx$$

となる。これに部分積分を2度ほどこせば、$\lambda(x),\lambda'(x)$ は $x=b$ および $x=c$ で0と仮定したので

$$=\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\lambda''(x)dx+\frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\lambda''(x)dx$$

となる。

さらに、n が何であっても μ が無限大に増大するとき、$\int_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)dx$ が無限に小さくなることは、容易に確かめられる；というのも この式は積分

$$\int_b^c\cos(\mu\pm n)(x-a)\lambda''(x)dx,\int_b^c\sin(\mu\pm n)(x-a)\lambda''(x)dx,$$

によって表され、そして $\mu\pm n$ が無限に大きくなるならば この積分は無限に小さくなり、また、$\mu\pm n$ がそうならない場合は、その時 n が無限に大きくなるためにこの表示につく係数が無限に小さくなるからである。

この理由から、われわれの定理を証明するには、和

$$\sum\frac{\mu^2}{(\mu-n)^2n^2}$$

において、$n<-c', c'',<n<\mu-c''', \mu+c^{IV}<n$ の条件を満たす 整数 n について和が　μ が無限に大きくなっていくとき 有界であることが示されれば 明らかに十分である。ここで、c',c'',c''',c^{IV} は、固定された

正の数を示す。なぜなら、$-c' < n < c'', \mu - c''' < n < \mu + c^{IV}$ である n に対する無限に小さくなる有限個の項を除いて、級数 Φ は、この和に $\int_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(x)dx$ の最大のものを乗じたものより小さく、このものは無限に小さくなるからである。

ここでしかし、c' 等 > 1 ならば、和

$$\sum \frac{\mu^2}{(\mu-n)^2 n^2} = \frac{1}{\mu}\sum \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\frac{n}{\mu})^2(\frac{n}{\mu})^2}$$

は 上述の範囲において、

$$-\infty < x < -\frac{c'-1}{\mu}, \frac{c''-1}{\mu} < x < 1 - \frac{c'''-1}{\mu}, 1 + \frac{c^{IV}-1}{\mu} < x < \infty$$

についてとった積分

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{(1-x)^2 x^2},$$

より小さい。というのは、$-\infty$ から ∞ までの全区間を、0からはじめて $\frac{1}{\mu}$ ずつ幅の区間に細分していき、各区間において関数をその最小値でおきかえると、この関数は区間の内部では最大値をとらないので、このようにして級数のすべての項が得られるからである。

この積分を実行すると

$$\frac{1}{\mu}\int \frac{dx}{x^2(1-x)^2} = \frac{1}{\mu}(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + 2\log x - 2\log(1-x)) + \text{定数}.$$

となり、従って 上述の区間で μ と共に無限に大きくならないある値が得られる。

9.

これらの定理を用いて、その項が x の各々の値に対して無限に小さくなる（訳注、一様に小さくなる）三角級数による 表現可能性について、次のことが確立される：

I. 長さ 2π の区間に従って周期的に反復する関数 $f(x)$ が、その項が x の各々の値に対して無限に小さくなる三角級数によって 表現され

るためには、ある連続関数 $F(x)$ があって α と β がその比が有限の値を保ちながら無限に小さくなるとき、

$$\frac{F(x+\alpha+\beta)-F(x+\alpha-\beta)-F(x-\alpha+\beta)+F(x-\alpha-\beta)}{4\alpha\beta}$$

が、$f(x)$ に対して収束するようでなければばならない。

さらに、$\lambda(x)$ と $\lambda'(x)$ が積分の上端、下端で $=0$ で その間で常に連続であるとき、そして $\lambda''(x)$ が有限個の極大と極小を持つとき、

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

は μ が増大するとき無限に小さくならなければならない。

II. 逆に この二つの条件が満たされている場合、三角級数があり、この三角級数において 係数は最後には無限に小さくなり、そしてそれが収束するあらゆる場所で 関数が表現される。なぜならば、いま

$$F(x)-C'x-A_0\frac{xx}{2}$$

が長さ 2π の区間に従って周期的に繰り返す関数であるように C', A_0 を定めるとき、これをフーリエの方法に従って、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)dt=C,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n\,(x-t)\,dt=-\frac{A_n}{nn}$$

として 三角級数

$$C-\frac{A_1}{1}-\frac{A_2}{4}-\frac{A_3}{9}-\cdots$$

に展開する。そうすると仮定により

$$A_n=-\frac{nn}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\cos n\,(x-t)\,dt$$

は 増大する n と共に最後には無限に小さくならなければならない；そこから前の節の定理 1 によって、級数

$$A_0+A_1+A_2+\cdots$$

は、それが収束するあらゆる場所で、$f(x)$ に収束することになる。

III. $b < x < c$であるとし $\varrho(t)$ は、$\varrho(t)$ と $\varrho'(t)$ が $t = b$ と $t = c$ に対して 値0を持ち、これらの値の間で連続で、$\varrho''(t)$ が有限個の極大と極小を持ち、さらに $t = x$ において $\varrho(t) = 1, \varrho'(t) = 0, \varrho''(t) = 0$ であり $\varrho'''(t), \varrho^{IV}(t)$ が 有限で連続であるような関数であるとする；このとき 級数

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

と 積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\varrho(t)dt$$

の差は 増大する n と共に 最後には無限に小さくなる。したがって級数

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

が収束するかしないかは、

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{dd\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)dt$$

が 増大する n と共に 最後にはある定まった極限に近づくか、または そうならないかということで知られる。　実際、

$$A_1 + A_2 + \cdots A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\sum_{1,\infty} -nn\cos n\,(x-t)\,dt,$$

あるいは

$$2\sum_{1,\infty} -nn\cos n\,(x-t) = 2\sum_{1,\infty}\frac{d^2\cos n\,(x-t)}{dt^2} = \frac{dd\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}$$

であるから

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t) - C't - A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}{dt^2}dt$$

である。
前節の定理3によって、$\lambda(t)$ がその第1次導関数と共に連続であ

り、$\lambda''(t)$ が有限個の極大と極小を持ち、そして $t=x$ のとき $\lambda(t)=0, \lambda'(t)=0, \lambda''(t)=0$ であり $\lambda'''(t), \lambda^{IV}(t)$ が有限で連続であるとき、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd^{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}}{dt^2}\lambda(t)dt$$

は n が無限に増大するとき無限に小さくなる。

この中で、$\lambda(t)$ が両端 b, c の外側で 1 で、 この両端の間で $1-\varrho(t)$ であるように与えられると、これは明らかに許されることであるが、これによって級数 $A_1+\cdots+A_n$ と積分

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left(F(t)-C't-A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd^{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}}{dt^2}\varrho(t)dt$$

の差は 増大する n と共に最後には無限に小さくなる。n が無限に大きくなる場合、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{b}^{c}\left(C't+A_0\frac{tt}{2}\right)\frac{dd^{\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}}}{dt^2}\varrho(t)dt.$$

が A_0 に収束することは、部分積分の計算を用いて簡単に示され、これによって上述の定理が得られる。

10.

この研究から、級数 Ω の係数が最後に無限に小さくなるとき、そこで x のある確定した値についての級数の収束が この値のすぐ近くにある関数 $f(x)$ の性質にのみ従属するということが明らかになった。

ところで、この級数の係数が最終的に無限に小さくなるかどうかは、多くの場合 定積分による表現からではなく、他の方法で決定されなければならない。しかしながら、関数 $f(x)$ の性質から直接決定できる場合があることは強調しておきたい。それは、関数 $f(x)$ が有界で積分可能である場合である。 この場合、$-\pi$ から π までの全区間を順番に幅

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$$

の区間に分解し、最初の区間上で関数の最大の変動を D_1 によって、二番目の区間上のを D_2 によって、... と表すとき、全ての δ が無限に小さくなると、

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \delta_3 D_3 + \cdots$$

も 無限に小さくならなければならない。

いま、因数 $\frac{1}{\pi}$ を無視した級数の係数の積分 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n(x-a)dx$ 、あるいは同じことであるが $x=a$ から始まる積分 $\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)dx$ を大きさ $\dfrac{2\pi}{n}$ の区間の積分に分解すると、それらの各積分は 、その和に、$\dfrac{2}{n}$ とその区間での最大の変動を乗じたものより小さい寄与を与え、 その和は仮定によって $\dfrac{2\pi}{n}$ と共に無限に小さくなる。

事実：この積分は

$$\int_{a+\frac{s}{n}2\pi}^{a+\frac{s+1}{n}2\pi} f(x)\sin n(x-a)dx$$

という形である。ｓｉｎは 前半で正に、後半で負になる。そこで、$f(x)$ の最も大きな値をその積分の区間上で M によって、最も小さな値を m によって表すと、積分は、$f(x)$ を前半で m で、後半で M でおきかえると大きくなり、前半で m で、後半で M でおきかえると 小さくなることは明らかである。前のときは値 $\frac{2}{n}(M-m)$ が、後のときは $\frac{2}{n}(m-M)$ が得られる。このことから、この積分は 符号を除いて $\frac{2}{n}(M-m)$ より小さく、積分

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin n(x-a)dx$$

は

$$\frac{2}{n}(M_1-m_1)+\frac{2}{n}(M_2-m_2)+\frac{2}{n}(M_3-m_3)+\cdots$$

より小さい、ただし、M_s は s 番目の区間における $f(x)$ の最大値、m_s は最小値である。; しかし $f(x)$ が積分可能であるとき、n が無限に大きくなり したがって区間 $\dfrac{2\pi}{n}$ の幅が無限に小さくなると、この和も無限に小さくならなければならない。

このことから この前提の場合、級数の係数は無限に小さくなる。

11.

さて、級数Ωの項が 最後には無限に小さくなるということがすべての点でそうなっているのでない場合については、さらに研究しなければならない。この場合は前の場合に還元される。
すなわち、変数の値$x+t$と$x-t$に対するそれらの級数を 項別に加えると、級数

$$2A_0 + 2A_1 \cos t + 2A_2 \cos 2t + \cdots$$

が得られ、ここではtの各々の値に対して 項が最後には無限に小さくなり、この級数に前述の研究が適用できる。

この目的のために、無限級数

$$C - C'x + A_0 \frac{xx}{2} + A_0 \frac{tt}{2} - A_1 \frac{\cos t}{1} - A_2 \frac{\cos 2t}{4} - A_3 \frac{\cos 3t}{9} - \cdots$$

の値を$G(t)$で表すと、$F(x+t)$と$F(x-t)$に対する級数が収束するすべての点で、$\frac{F(x+t)+F(x-t)}{2}$が$= G(t)$となり、次のことが明らかになる：

I. 級数Ωの項が 変数の値xに対して最後には無限に小さくなるとき、λが上述の第9節に述べたような関数を表す場合、

$$\mu\mu \int_b^c G(t) \cos \mu(t-a) \lambda(t) dt$$

は 増大するμと共に最後には無限に小さくなる。この積分の値は二つの部分$\mu\mu \int_b^c \frac{F(x+t)}{2} \cos \mu(t-a) \lambda(t) dt$と$\mu\mu \int_b^c \frac{F(x-t)}{2} \cos \mu(t-a) \lambda(t) dt$から成り、これらがが値を持っている場合は、その和になる。故に この値が無限に小さくなることも、xの両側に対称の位置にある点における関数Fの挙動に依存する。しかしここで それぞれの部分が無限に小さくならない所が必ずでてくることに注意しなければならない；そうでないとこの級数の項は各変数の値に対して最後には無限に小さくなるということになるからである。そしてxの両側に対称の位置にある場所の寄与は差し引きになってその和は無限に大きくなるμに対して無限に小さくなる。このことから級数Ωは、$\mu\mu \int_b^c F(x) \cos \mu(t-a) \lambda(t) dt$が、無限に大きくなる$\mu$に対して無限に小さくならないという場所が対称に位置するようなxの値についてのみ収束できることになる。し

たがって無限に減少はしない係数を持つ三角級数が無限に多くの値について収束するためには、この点の数が無限に多くなければならない。

逆に、$\mu\mu\int_b^c G(t)\cos\mu(t-a)\lambda(t)dt$ が 無限に大きくなる μ に対して常に無限に小さくなる場合は、

$$A_n = -nn\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (G(t) - A_0\frac{tt}{2})\cos ntdt$$

は、増大する n と共に最後には無限に小さくなる。

II. 級数 Ω の項が 変数の値 x に対して無限に小さくなるとき、その級数が収束するかしないかは、無限に小さい t に対する関数 $G(t)$ の挙動のみに依っている。より厳密に言えば、b が 0 と π の間に含まれるうんと小さな数で、$\varrho(t)$ は、$\varrho(t)$ と $\varrho'(t)$ が連続で、$t = b$ で 0 であり、$\varrho''(t)$ が有限個の極大と極小を持ち、そして $t = 0$ で $\varrho(t) = 1, \varrho'(t) = 0,$ そして $\varrho''(t) = 0$ と $\varrho''''(t)$ が有限で連続であるような関数を表すとき、

$$A_0 + A_1 + \cdots + A_n$$

と 積分

$$\frac{1}{\pi}\int_b^c G(t)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{(x-t)}{2}}}{dt^2}\varrho(t)dt$$

の差は 増大する n と共に最後には無限に小さくなる。

12.

三角級数によって関数が表現できる条件については もちろん まだいくらか制限を加え、それによって 関数の性質に関する特別な前提のない我々の研究は なおもう少し進めることができる。例えば、積分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b G(t)\frac{dd\dfrac{\sin\dfrac{2n+1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}}{dt^2}\varrho(t)dt$$

において $G(t)$ の代わりに $G(t)-G(0)$ を用いれば、最後に得られた定理では、$\varrho''(0)=0$ 　という条件は省くことができる。それではしかし 本質的なものは何も得られない。

そこで 特別な事例を考察することによって、我々は先ず、有限個の極大と極小を持つ関数についての研究を完成させることに努めよう。これは ディリクレの研究によって もできたことである。

このような関数は無限にならない所ではどこでも積分可能であることは先に述べられている。そして 無限になるのは有限個の場所でしか起こらない。また、ディリクレの証明から、次のことがわかる。級数の第 n 項に対する積分表示、および第 n 項までの和に対する積分表示において、関数が無限に大きくなる場所を除いては任意の線分からの寄与ならびに級数の変数の値に無限に近い線分からの寄与は、n が大きくなると、無限に小さくなる。

$$\int_x^{x+b} f(t)\frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}(x-t)}{\sin\dfrac{\sin(x-t)}{2}}dt,$$

は $f(t)$ が上端、下端の間で無限大にならないときはこの積分は n を無限大にするとき $\pi f(x+0)$ に収束する、関数が連続であるという不必要な前提を省いて、これ以上望むところはない。そこであとは、どのような場合に これらの積分式において 関数が無限になるところの寄与が、n が無限に大きくなるとき最後には無限に小さくなるかを調べるだけである。これはまだ未解決である；ディリクレは 表現すべき関数が積分可能なときはこのことがいえることを述べているが、この仮定は不要である。

我々は先に、その第 2 次導関数が $f(x)$ である関数 $F(x)$ が、級数 Ω の項が x の各々の値について最後には無限に小さくなるとき、有限で連続でなければならないこと、そして

$$\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

が α と共に常に無限に小さくなることを確かめた。さらに $F'(x+t)-F'(x-t)$ が有限個の極大と極小を持つ場合、それは t が 0 になるところで確定した極限値 L に対して収束するかあるいは 無限に大きくなる。そしてそのとき

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left(F'(x+t)-F'(x-t)\right)dt=\frac{F(x+\alpha)-2F(x)+F(x-\alpha)}{\alpha}$$

は同じく L または ∞ に収束する、したがって $F'(x+t)-F'(x-t)$ が 0 に収束するときにのみ、無限に小さくになる。$f(x)$ が $x=\alpha$ に対して無限に大きくなるときは、$f(x+t)+f(x-t)$ は $t=0$ のところまで積分できなくてはならない。

$$\left(\int_b^{a-\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^c\right)dx\,(f(x)\cos n(x-a))$$

が 減少する ε と共に収束し、増大する n と共に無限に小さくなるためには、これで十分である。さらに 関数 $F(x)$ が有限で連続なため、$F'(x)$ は $x=a$ のところまで積分ができて、この関数が有限個の極大と極小を持つ場合は $(x-a)F'(x)$ は $(x-a)$ と共に無限に小さくならなければならない；そこから

$$\frac{d(x-a)F'(x)}{dx}=(x-a)f(x)+F'(x)$$

となり、さらに $(x-a)f(x)$ が $x=a$ のところまで積分できることになる。このことから $\int f(x)\sin(x-a)dx$ もまた $x=a$ のところまで積分できて、級数の係数が最後に無限に小さくなるためには、さらに

$$b<a<c \quad \text{に対して} \int_b^c f(x)\sin n(x-a)dx$$

が増大する n と共に最後には無限に小さくなることだけが明らかに必要である。ディリクレが示したように、

$$f(x)(x-a)=\varphi(x)$$

とすると、この関数が 有限個の極大と極小を持つ場合は、無限の n について

$$\int_b^c f(x)\sin n(x-a)dx=\int_b^c\frac{\varphi(x)}{x-a}\sin n(x-a)dx=\pi\frac{\varphi(a+0)+\varphi(a-0)}{2},$$

となる。このことから

$$\varphi(a+t)+\varphi(a-t)=f(a+t)t-f(a-t)t$$

は t と共に無限に小さくならなければならず、そして

$$f(a+t)+f(a-t)$$

は $t=0$ のところまで積分でき、従って

$$f(a+t)t+f(a-t)t$$

は t と共に無限に小さくなるため、$f(a-t)t$ も $f(a+t)t$ も、減少する t と共に最後には無限に小さくならなければならない。無限に多くの極大と極小を持つ関数は別として、関数 $f(x)$ が無限に減少する係数を持つ三角級数によって表現されるためには、その関数が $x=a$ に対して無限大になるとき、$f(a+t)t$ と $f(a-t)t$ が t と共に無限に小さくなり、$f(a+t)+f(a-t)$ が $t=0$ のところまで積分できることが必要かつ十分である。
無限に小さくはならない係数を持つ三角級数によって、有限個の極大と極小を持つ関数 $f(x)$ は、

$$\mu\mu\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)dx$$

が 有限固の場所だけで μ の値が無限大になるとき無限に小さくならないため、やはり（我々がこれ以上探究する必要のない）変数の値の有限の数に対してだけ表現されることになる。

13.

無限に多くの極大と極小を持つ関数に関しては、無限に多くの極大と極小を持つ関数 $f(x)$ で、フーリエ級数によっては表現できないが、いたるところで積分できることもあることに注目するのは無駄なことではないであろう。これは例えば、$f(x)$ が 0 と 2π との間で

$$\frac{d(x^\nu\cos\frac{1}{x})}{dx},\quad \text{ただし } 0<\nu<\frac{1}{2}$$

に等しいときにおこる。なぜなら、積分 $\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)dx$ においてて n が無限大にいくとき $x=\sqrt{\frac{1}{n}}$ の近傍での寄与は、一般的に言って、究極的に無限に大きくなり、その結果

$$\frac{1}{2}\sin\left(2\sqrt{n}-na+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}n^{\frac{1-2\nu}{4}}$$

とこの積分との比は、次に示される方法で確かめられるように、1 に収束する。ここで この問題の本質をより際だたせるために例を一般化して、

$$\int f(x)dx=\varphi(x)\cos\psi(x)$$

とし、ここで $\varphi(x)$ は無限に小さな x に対して無限に小さく、$\psi(x)$ は無限に大きくなり、それ以外ではしかし これらの関数はその微分商と共に連続であり、有限個の極大と極小を持つと、仮定する。すると

$$f(x) = \varphi'(x)\cos\psi(x) - \varphi(x)\psi'(x)\sin\psi(x)$$

となり

$$\int f(x)\cos n(x-a)dx$$

は 4つの積分

$$\frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cos\left(\psi(x) \pm n(x-a)\right)dx,$$

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi'(x)\sin\left(\psi(x) \pm n(x-a)\right)dx$$

の和に等しくなる。ここで、ψ は正として、項

$$-\frac{1}{2}\int \varphi(x)\psi'(x)\sin\left(\psi(x) \pm n(x-a)\right)dx$$

を 考察する、そしてこの積分において 正弦の正負の交代が最もゆっくりと生じる場所を探究する。

$$\psi(x) + n(x-a) = y$$

とすると、$\frac{dy}{dx} = 0$ となるところでこのことが生じる。
つまりその $x = \alpha$ で、$\psi'(\alpha) + n = 0$ である。そこで無限に増大する n に対して無限に小さくなる ε について、積分

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} \varphi(x)\psi'(x)\sin y dx$$

の振る舞いを探究する、ここで変数として y をとる。

$$\psi(\alpha) + n(\alpha - a) = \beta$$

とおくと、十分に小さい ε に対し

$$y = \beta + \psi''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2} + \cdots$$

となる、それも $\psi(x)$ が無限に小さい x に対し 正の無限大となるために、$\psi''(\alpha)$ は正である；

$$\frac{dy}{dx} = \psi''(\alpha)(x-\alpha) = \pm\sqrt{2\psi''(\alpha)(y-\beta)},$$

この正負は $x-\alpha \gtrless 0$ のそれぞれに応じていて、さらに

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin y dx$$

$$=\frac{1}{2}(\int_{\beta-\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}^{\beta}-\int_{\beta}^{\beta+\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}})(\sin y\frac{dy}{\sqrt{y-\beta}})\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

$$=-\int_{0}^{\psi''(\alpha)\frac{\varepsilon\varepsilon}{2}}\sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}\frac{\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

である。そこで増大する n と共に ε が $\psi''(\alpha)\varepsilon\varepsilon$ が無限に大きくなるように減少するとすると、

$$\int_0^\infty \sin(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

—これは よく知られているように $\sin(\beta+\frac{\pi}{4})\sqrt{\pi}$ に等しい—が 0 でない場合は、より低いオーダーの量を除いて

$$-\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\varphi(x)\psi'(x)\sin(\psi(x)+n(x-a))dx = -\sin(\beta+\frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{\pi}\varphi(\alpha)\psi'(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

となる。このことから、この量が無限に小さくならない場合は、この量と

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)dx$$

の比は、この量の残りの要素が無限に小さくなるため、n が限りなく大きくなるとき、1 に収束する。$\varphi(x)$ と $\psi'(x)$ が、無限に小さい x に対して x のべき乗と同じオーダーであるとする。そして実際 $\varphi(x)$ は x^ν と $\psi'(x)$ は $x^{-\mu-1}$ と同じオーダーであるとする。ここで $\nu>0, \mu\geqq 0$. そうすると、無限に大きくなる n に対し、

$$\frac{\varphi(\alpha)\psi''(\alpha)}{\sqrt{2\psi''(\alpha)}}$$

は $\alpha^{\nu-\frac{\mu}{2}}$ と同じオーダーになり、従って $\mu \geqq 2\nu$ ならば 無限に小さくはならない。一般に、$x\psi'(x)$ が、あるいは同じことだが $\frac{\psi(x)}{\log x}$ が x が無限に小さくなるとき無限に大きくなれば、$\varphi(x)$ は、それ自身は無限に小さくなる x に対して $\varphi(x)$ が無限に小さくなるが、

$$\varphi(x)\frac{\psi'(x)}{\sqrt{2\psi''(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\frac{d}{dx}\frac{1}{\psi'(x)}}} = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{-2\lim\frac{1}{x\psi'(x)}}}$$

は無限に大きくなるように、従って $\int_x f(x)dx$ は $x=0$ まで広げることができるが

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)dx$$

は 無限の n に対し無限に小さくならない。見ての通り、積分 $\int_x f(x)dx$ においては x の無限の減少の際における積分の増大は、その x の変化に対する比が 非常に速く大きくなるにもかかわらず、関数 $f(x)$ の符号の変化が速いために 差し引き 0 になる；しかし因数 $\cos n(x-a)$ がさらに加わることによって ここでこの積分の増大は増やされることになるのである。

しかし、これによって至る所積分ができるにもかかわらず フーリエ級数が収束せず、その項が最後には無限に大きくなるというのと同じく、至る所 $f(x)$ の積分ができないのにもかかわらず どんなに近い 2 つの値の間にも 級数 Ω が収束する ような x の無限に多くの値が存在することがあり得る。

記号 (nx) の意味を上記 (6 節) のようにとれば、1 つの例が級数

$$\sum_{1,\infty}\frac{(nx)}{n}$$

によって与えられる。この関数は x の各々の有理数の値に対して存在し、三角級数

$$\sum_{1,\infty}^{n}\frac{\Sigma^{\theta}-(-1)^{\theta}}{n\pi}\sin 2nx\pi$$

によって表現される。ここで $\Sigma^{\theta}-(-1)^{\theta}$ は n のすべての約数 θ について $-(-1)^{\theta}$ の和を表す。しかしその値はどんなに短い区間をとっても 有限の

幅の中にははいらない、そしてその結果どこでも積分はできない。
別の例として、　級数

$$\sum_{0,\infty} c_n \cos nnx, \sum_{0,\infty} c_n \sin nnx$$

がある。ここで $c_0, c_1, c_2, \cdots$ は 0 に収束する正数の列で、$\sum_{1,n}^{s} c_s$ が　n と共に無限に大きくなるとする、この例では 2π に対する x の比が有理数で、既約分数で表したとき分母 m を持つとすれば、明らかに、

$$\sum_{0,m-1} \cos nnx, \sum_{0,m-1} \sin nnx$$

が 0 に等しいか等しくないかによって、この級数は収束するかまたは無限大に増大するからである。どちらの場合もよく知られた円周等分の定理 (Gauss,Disquistiones Arithmeticae,p.636 art.356) によって、それぞれどんなに密接した二つの値の間にも x の無限に多い値に対して生じる。
また、非常に広い状況の中で級数 Ω は、積分計算によって各々の項が Ω から得られる級数

$$C' - A_0 x - \sum \frac{1}{nn}\frac{dA_n}{dx},$$

の値がどんなに小さな区間においても積分できない場合でも、Ω は収束することがある。　例えば、q の昇べきに従って展開した式

$$\sum_{1,\infty} \frac{1}{n^3}(1-q^n)\log(\frac{-\log(1-q^n)}{q^n})$$

を考える。ここで対数は $q = 0$ に対して 0 になるように取る。ここで $q = e^{xi}$ とすると、その虚数部分は一つの三角級数となり、それを x について 2 回微分したものはどの区間の上でも無限に多くのところで収束するが、その最初の微分商は無限に多くのところで無限になる。
同じ状況において、つまりそれぞれ 2 つのどんなに近い値の間でもその係数が最後に無限に小さくならない三角級数が無限にしばしば、収束することがありうる。このような級数のある分かりやすい例は無限級数 $\sum_{1,\infty} \sin(n! x\pi)$ である。ここで $n!$ は、よく使われているように、=1.2.3. . . . n, であり、この無限級数は、x の各々の有理数の値については、有限のものになってしまうことによって収束するが、その他にも、ある無限個の無理数についても収束する。この無理数のうち最も単純なものは $\sin 1, \cos 1, \frac{2}{e}$ とその倍数、$e, \frac{e-\frac{1}{e}}{4}$ の奇数倍、等々。

目　次.

この翻訳は島田　洋子氏(ドイツ語研究家)の素訳を下地にして小柴が数学部分を訳したものです。もちろん翻訳（文章）責任は小柴にあります。
この論稿への感想は電子メールで
koshiba@sci.kagoshima-u.ac.jp
にお送りください。
校正に際して、竹之内脩先生にはたいへんお世話になりました。謝辞の言葉を表さずにはおられません。

参考文献

[1] Bernhard Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,Gesammelte Werke,Springer,1991, 全集の通しページで 273 ページを参照,

[2] 一松　信, 解析学序説 (下), 裳華房,242 ページを参照,1982 年

[3] 近藤　洋逸, 数学思想史序説, 三一書房,86 ページから 119 ページまでを参照,1947 年